

Note sur l'incertitude  
de la formule pour la détermination  
de la masse volumique de l'air

---

Au cours de la Réunion internationale concernant les Masses (BIPM, 23 et 24 novembre 1976), trois Groupes de travail ont été formés.

Le Groupe de travail 1<sup>(1)</sup> était chargé d'étudier la question de savoir si l'on peut ou non trouver une formule commune pour la correction de poussée de l'air, formule qui pourrait ensuite être utilisée par tous les laboratoires.

Ce Groupe de travail est parvenu à établir un document<sup>(2)</sup> qui comporte une formule pour le calcul de la masse volumique de l'air humide ainsi que des tableaux et des formules auxiliaires pour l'application de cette formule.

Dans la présente Note, après un bref rappel de la méthode utilisée pour établir la formule en question, je tenterai d'évaluer l'incertitude propre de cette formule, puis je donnerai quelques indications sur l'incertitude due aux paramètres mesurés lors de son application.

#### I.- RAPPEL DE LA FORMULE

Pour un gaz parfait (pression  $p$ , volume  $V$ , température thermodynamique  $T$ , quantité de matière  $n$ ), on a la relation

$$pV = nRT,$$

où  $R$  est la constante molaire des gaz.

---

(1) Les membres de ce Groupe de travail sont : P. Riéty (IMM), F.E. Jones (NBS), P. Carré (BIPM) auxquels a été adjoint M. Kochsiek (PTB).

(2) Formule pour la détermination de la masse volumique de l'air humide.

Un projet pour un tel document, établi par P. Riéty et P. Carré, avait été adressé le 12 juillet 1978 aux deux autres membres du Groupe de travail. Il a été remanié le 30 novembre 1978. En particulier, le chapitre 4 (INCERTITUDES) a fait l'objet d'une nouvelle rédaction. Le document ainsi établi a obtenu l'accord unanime des quatre membres du Groupe de travail. Il a été diffusé le 21 février 1979, par les soins du BIPM, aux participants à la Réunion concernant les Masses.

Le chapitre 4 du projet constitue la base de la présente Note. Celle-ci ne comporte pas de BIBLIOGRAPHIE. Les références qui y sont données se rapportent à celle qui figure à la fin du Document du Groupe de travail.

Pour un gaz réel, on doit introduire le facteur de compressibilité  $Z$  et écrire

$$pV = nZRT.$$

Introduisons la masse  $m$  du gaz et sa masse molaire  $M$  ; sa masse volumique  $\rho$  est

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} = \frac{pM}{ZRT}.$$

Pour l'air humide, qui comporte la fraction molaire  $x_v$  de vapeur d'eau, de masse molaire  $M_v$ , et la fraction molaire  $(1-x_v)$  d'air sec, de masse molaire  $M_a$ , on a

$$M = (1-x_v)M_a + x_vM_v = M_a \left[ 1-x_v \left( 1- \frac{M_v}{M_a} \right) \right],$$

soit finalement 
$$\rho = \frac{pM_a}{ZRT} \left[ 1-x_v \left( 1- \frac{M_v}{M_a} \right) \right].$$

Dans son document, le Groupe de travail donne les références bibliographiques d'où il a tiré les valeurs des grandeurs nécessaires à la spécification des paramètres de la formule littérale ci-dessus ainsi que des explications sur les choix qu'il a été amené à faire. Ainsi,  $R$ ,  $M_v$  et, dans une certaine mesure,  $M_a$  peuvent être remplacés par leurs valeurs, de sorte que les grandeurs qui subsistent sous forme littérale dans la formule finale (formule 15) sont  $p$ ,  $Z$ ,  $T$  et  $x_v$ .

Cependant, si l'on a la possibilité de mesurer la fraction molaire  $x(\text{CO}_2)$  du dioxyde de carbone, il est préférable de considérer que  $M_a$  est fonction de l'écart entre cette fraction molaire et celle qui a été prise comme référence,  $x_0(\text{CO}_2)$ . L'hypothèse selon laquelle les variations de la fraction molaire du dioxyde de carbone sont associées à des variations opposées de la fraction molaire de l'oxygène permet d'écrire  $M_a$  sous la forme

$$M_a = M'_a + M''_a$$

avec 
$$M''_a = (M_{\text{CO}_2} - M_{\text{O}_2}) \cdot [x(\text{CO}_2) - x_0(\text{CO}_2)],$$

$M'_a$  n'étant autre que la valeur de  $M_a$  calculée pour  $x(\text{CO}_2) = x_0(\text{CO}_2)$ .

Une variante de la formule finale (formule 16) est donnée. Elle contient sous forme littérale les cinq grandeurs  $p$ ,  $Z$ ,  $T$ ,  $x_v$  et  $x(\text{CO}_2)$  noté  $x_{\text{CO}_2}$ .

Le Document donne ensuite les formules nécessaires à la détermination de  $x_v$ , dans deux cas :

1°/ on mesure l'humidité relative  $h$ , alors  $x_v = h \cdot f(p, t) \cdot \frac{p_{sv}(t)}{p}$  ;

2°/ on mesure la température du point de rosée  $t_r$ , alors

$$x_v = f(p, t_r) \cdot \frac{p_{sv}(t_r)}{p}.$$

Dans ces deux formules,  $t$  est la température Celsius,  $f$  est le "facteur d'augmentation", fonction de la pression et de la température ;  $p_{sv}$  est la pression de vapeur d'eau saturante, fonction de la température seule.

Enfin,  $Z$  est donné en fonction de la pression, de la température et de l'humidité relative (ou, ce qui revient au même, de la fraction molaire de la vapeur d'eau).

Finalement, les paramètres à mesurer se réduisent à  $p$ ,  $t$  et  $h$  (ou  $t_r$ ) et éventuellement  $x_{CO_2}$ .

L'estimation de l'incertitude relative sur  $\rho$  exige que l'on exprime la différentielle logarithmique totale de  $\rho$  en fonction des différentielles de tous les paramètres. Dans l'expression obtenue, les termes qui font intervenir les différentielles des paramètres mesurés contribuent à l'incertitude relative due à la mesure de ces paramètres, les autres contribuent à l'incertitude relative propre de la formule.

Dans le chapitre II qui suit, je ne me préoccuperais donc pas des paramètres mesurés qui figurent explicitement dans l'expression de  $\rho$  : ils seront traités au chapitre III. Cependant, la différentiation des autres paramètres pourra faire apparaître les différentielles des paramètres mesurés lorsque ceux-ci y figurent implicitement ; les termes ainsi obtenus seront repris au chapitre III.

## II.- INCERTITUDE PROPRE DE LA FORMULE

### 1. Constante molaire des gaz $R$

L'influence de l'incertitude de la constante molaire des gaz  $R$  s'exprime immédiatement.

$$\text{En effet} \quad \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial R} \cdot dR = - \frac{dR}{R}.$$

L'incertitude relative ( $1 \sigma$ ) sur  $R$  est évaluée à  $\frac{31 \times 10^{-6}}{[9]}$ . Elle entraîne sur  $\rho$  une incertitude de même valeur et de caractère systématique.

### 2. Masse molaire de l'air sec $M_a$

On a

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial M_a} \cdot dM_a = \frac{dM_a}{M_a} - \frac{(M_v/M_a^2) x_v \cdot dM_a}{1 - (1 - M_v/M_a) x_v} = \frac{dM_a}{M_a} \left[ 1 - \frac{(M_v/M_a) x_v}{1 - (1 - M_v/M_a) x_v} \right].$$

Dans des conditions extrêmes ( $p = 60\ 000\ \text{Pa}$ ,  $t = 27\ ^\circ\text{C}$  et  $h = 1$ ), on a  $x_V = 0,06$ . Même dans ce cas, le second terme de l'expression entre crochets n'atteint pas 0,04. On peut donc le négliger, dans l'évaluation d'une incertitude et écrire

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial M_a} \cdot dM_a = \frac{dM_a}{M_a}.$$

On a 
$$M_a = \sum_i x_i M_i,$$

soit 
$$dM_a = \sum_i x_i dM_i + \sum_i M_i dx_i,$$

avec la condition 
$$\sum_i x_i = 1.$$

Les sommes sont en principe étendues à tous les constituants de l'air sec, mais en fait les termes provenant des constituants autres que l'azote, l'oxygène, l'argon et le dioxyde de carbone sont négligeables en raison des faibles valeurs correspondantes de  $x_i$ .

Nous allons traiter séparément les deux sommes figurant dans l'expression de  $dM_a$ .

### 2.1. Masses molaires des constituants de l'air sec

Des incertitudes respectives ( $1\ \sigma$ ) de  $1 \times 10^{-7}$ ,  $2 \times 10^{-7}$ ,  $10 \times 10^{-7}$  et  $5 \times 10^{-7}$  kg/mol [2] sur les masses molaires admises pour  $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$ , Ar et  $\text{CO}_2$  entraînent pour  $M_a$  des incertitudes relatives de  $2,7 \times 10^{-6}$ ,  $1,4 \times 10^{-6}$ ,  $0,3 \times 10^{-6}$  et  $0,0 \times 10^{-6}$  dont la somme quadratique est environ  $3 \times 10^{-6}$ . Il en résulte pour  $\rho$  une incertitude relative de même valeur et de caractère systematique.

### 2.2. Fractions molaires des constituants de l'air sec

La condition  $\sum_i x_i = 1$  permet d'écrire, en se limitant aux quatre constituants les plus abondants

$$dx(\text{N}_2) + dx(\text{O}_2) + dx(\text{Ar}) + dx(\text{CO}_2) = 0$$

ou 
$$dx(\text{N}_2) = -dx(\text{O}_2) - dx(\text{Ar}) - dx(\text{CO}_2)$$

d'où

$$\sum_i M_i dx_i = (M_{\text{O}_2} - M_{\text{N}_2}) \cdot dx(\text{O}_2) + (M_{\text{Ar}} - M_{\text{N}_2}) \cdot dx(\text{Ar}) + (M_{\text{CO}_2} - M_{\text{N}_2}) \cdot dx(\text{CO}_2).$$

Aux  $dx_i$  introduits peuvent correspondre à la fois une composante systematique de l'incertitude, due à l'écart entre les  $x_i$  admis et leurs valeurs moyennes, et une composante aléatoire, due à la variabilité de ces grandeurs. D'autre part, si on mesure  $x(\text{CO}_2)$ , on doit tenir compte de l'incertitude de la mesure, mais le calcul de l'incertitude propre de la formule se trouve, de ce fait, modifié.

Après avoir évalué l'incertitude sur  $\rho$  due à l'incertitude sur la fraction molaire de l'argon, je traiterai séparément le cas où l'on ne mesure pas la fraction molaire de  $\text{CO}_2$  et le cas où on la mesure.

La fraction molaire de l'argon  $x(\text{Ar})$  a été prise égale à 0,009 17 [18,19], mais des mesures plus anciennes dont il est encore fait mention [15,17] avaient donné 0,009 34. Si l'on prend comme incertitude ( $1 \sigma$ ) le tiers de la différence entre ces valeurs (ce qui revient à donner un poids prépondérant aux mesures récentes), on obtient pour incertitude sur la fraction molaire de l'argon  $5,7 \times 10^{-5}$ , ce qui correspond à une incertitude relative ( $1 \sigma$ ) sur  $M_a$  de  $23 \times 10^{-6}$ . Il en résulte pour  $\rho$  une incertitude relative de même valeur. La variabilité de la fraction molaire de l'argon semble être nettement inférieure à l'incertitude admise pour cette grandeur ; l'incertitude que l'on vient d'estimer est donc pratiquement de caractère systématique.

### 2.2.1. Cas où l'on ne mesure pas la fraction molaire de $\text{CO}_2$

Pour les composantes systématiques de l'incertitude sur  $x(\text{O}_2)$  et  $x(\text{CO}_2)$ , nous adoptons les valeurs respectives  $6 \times 10^{-5}$  et  $3 \times 10^{-5}$  [2]. Il en résulte pour  $\rho$  les incertitudes systématiques ( $1 \sigma$ )  $8 \times 10^{-6}$  et  $17 \times 10^{-6}$ .

Les composantes aléatoires des incertitudes sur  $x(\text{O}_2)$  et  $x(\text{CO}_2)$  ne sont pas indépendantes du fait que les variations  $\delta x(\text{O}_2)$  et  $\delta x(\text{CO}_2)$  sont dans une certaine mesure opposées.

Posons  $\delta x(\text{O}_2) = \delta''x(\text{O}_2) + \delta'x(\text{O}_2)$ , avec  $\delta''x(\text{O}_2) = -\delta x(\text{CO}_2)$  ; le terme  $\delta'x(\text{O}_2)$  représente alors les variations de  $x(\text{O}_2)$  non accompagnées de variations opposées de  $x(\text{CO}_2)$ . La variation aléatoire relative totale de  $M_a$  due à ces deux constituants est alors

$$\left[ (M_{\text{O}_2} - M_{\text{N}_2}) \cdot \delta''x(\text{O}_2) + (M_{\text{O}_2} - M_{\text{N}_2}) \cdot \delta'x(\text{O}_2) + (M_{\text{CO}_2} - M_{\text{N}_2}) \cdot \delta x(\text{CO}_2) \right] / M_a = \\ (M_{\text{O}_2} - M_{\text{N}_2}) \cdot \delta'x(\text{O}_2) / M_a + (M_{\text{CO}_2} - M_{\text{O}_2}) \cdot \delta x(\text{CO}_2) / M_a.$$

Une évaluation de ces deux termes est obtenue en adoptant pour  $\delta'x(\text{O}_2)$  et  $\delta x(\text{CO}_2)$  les valeurs données dans [4] et divisées par 3 pour les ramener à  $1 \sigma$ , soit respectivement  $17 \times 10^{-5}$  et  $3 \times 10^{-5}$ . Il leur correspond pour  $\rho$  les incertitudes aléatoires ( $1 \sigma$ )  $23 \times 10^{-6}$  et  $12 \times 10^{-6}$ .

### 2.2.2. Cas où l'on mesure la fraction molaire de $\text{CO}_2$

L'expression établie ci-dessus donne la variation relative de  $M_a$  due aux variations  $\delta x(\text{O}_2)$  et  $\delta x(\text{CO}_2)$ . Dans le cas qui est traité maintenant, la variation  $\delta x(\text{CO}_2)$  est mesurée ; elle n'intervient donc plus que par l'intermédiaire de l'incertitude de sa mesure  $\Delta x(\text{CO}_2)$ . Le terme correspondant

$$(M_{\text{CO}_2} - M_{\text{O}_2}) \cdot \Delta x(\text{CO}_2) / M_a$$

sera repris au chapitre III.

Le premier terme  $(M_{\text{O}_2} - M_{\text{N}_2}) \cdot \delta' x(\text{O}_2) / M_a$  subsiste seul ici <sup>(3)</sup>.

Pour évaluer la composante systematique correspondant à ce terme, remarquons que

$$\begin{aligned} \delta' x(\text{CO}_2) &= \delta x(\text{O}_2) - \delta'' x(\text{O}_2) \\ &= \delta x(\text{O}_2) + \delta x(\text{CO}_2), \end{aligned}$$

et composons quadratiquement les valeurs données au début du paragraphe précédent. Nous obtenons  $7 \times 10^{-5}$ . Il en résulte pour  $M_a$  et par suite pour  $\rho$  l'incertitude relative systematique ( $1 \sigma$ )  $10 \times 10^{-6}$ .

Pour évaluer la composante aléatoire correspondant au même terme, nous prenons pour  $\delta' x(\text{O}_2)$  la valeur  $17 \times 10^{-5}$  déjà adoptée au paragraphe précédent. Il en résulte pour  $M_a$  et par suite pour  $\rho$  l'incertitude relative aléatoire ( $1 \sigma$ )  $23 \times 10^{-6}$ .

### 3. Masse molaire de l'eau $M_v$

$$\text{On a } \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial M_v} \cdot dM_v = \frac{(x_v / M_a) \cdot dM_v}{1 - (1 - M_v / M_a) x_v}.$$

A une incertitude sur  $M_v$  de  $5 \times 10^{-7}$  kg/mol [2], correspond, dans le cas extrême  $x_v = 0,06$ , une incertitude relative sur  $\rho$  de  $1 \times 10^{-6}$ . On peut donc négliger ce terme pour les conditions habituelles où  $x_v$  ne dépasse pas environ 0,02.

Il faut aussi remarquer que la grandeur  $1 - M_v / M_a$  varie de 0,37798 à 0,37804 lorsque  $x(\text{CO}_2)$  varie de 0,000 3 à 0,000 5. En attribuant à cette grandeur la valeur constante 0,378 0, on commet une erreur relative comprise entre  $- 0,4 \times 10^{-6}$  et  $+ 0,8 \times 10^{-6}$ , pour  $x_v = 0,02$ . On peut négliger cette erreur.

(3) On peut naturellement retrouver ce résultat à l'aide de la formule complète dont la forme a été donnée en I, forme dans laquelle on a introduit les grandeurs  $M'_a$  et  $M''_a$ . L'expression établie ci-dessus en 2.2.1 représente la variation de  $M'_a$  par rapport à la valeur calculée pour établir la formule; c'est donc l'opposé de l'erreur de la formule. Le second terme de cette erreur est exactement compensé par la valeur de  $M''_a$ , mais l'incertitude de la mesure de  $x(\text{CO}_2)$  introduit un terme que l'on obtient immédiatement en calculant  $\frac{1}{M_a} \cdot \partial M''_a / \partial x(\text{CO}_2)$  et qui n'est autre que le terme déjà rencontré dont on a dit qu'il sera repris au chapitre III.

#### 4. Facteur de compressibilité Z

On a 
$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial Z} \cdot dZ = - \frac{dZ}{Z} .$$

On lit dans une table une valeur  $Z_0$  qui diffère de la valeur de  $Z$  recherchée en raison de l'incertitude propre de la table et des incertitudes sur les paramètres  $p$ ,  $t$ ,  $h$  dont dépend  $Z$ .

On écrira 
$$\frac{dZ}{Z} = \frac{\Delta Z_0}{Z} + \frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial Z_0}{\partial p} \cdot dp + \frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial Z_0}{\partial t} \cdot dt + \frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial Z_0}{\partial h} \cdot dh$$

Les trois derniers termes seront repris au chapitre III.

L'incertitude relative ( $1 \sigma$ ) sur les valeurs tabulées de  $Z$  est estimée à  $17 \times 10^{-6}$  [2]. Le premier terme de l'expression ci-dessus correspond donc, pour  $\rho$ , à une incertitude relative de même valeur, de caractère systématique.

#### 5. Fraction molaire de la vapeur d'eau $x_v$

On a 
$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_v} \cdot dx_v = - \frac{(1 - M_v/M_a) \cdot dx_v}{1 - (1 - M_v/M_a) x_v} \approx - \left( 1 - \frac{M_v}{M_a} \right) \cdot dx_v .$$

##### 5.1. Mesure directe de l'humidité relative $h$

L'expression de  $x_v$  rappelée en I (1°) permet d'écrire

$$\frac{dx_v}{x_v} = \frac{dh}{h} + \frac{df}{f} + \frac{dp_{sv}}{p_{sv}} - \frac{dp}{p} .$$

Le premier et le quatrième terme seront repris au chapitre III.

Avec des notations analogues à celles introduites ci-dessus en 4,

$$\frac{df}{f} = \frac{\Delta f_0}{f} + \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial p} \cdot dp + \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial t} \cdot dt$$

et 
$$\frac{dp_{sv}}{p_{sv}} = \frac{\Delta p_{sv.0}}{p_{sv}} + \frac{1}{p_{sv}} \cdot \frac{\partial p_{sv.0}}{\partial t} \cdot dt .$$

Seul, le premier terme de chacune des deux dernières expressions doit être pris en compte ici, les trois autres seront repris au chapitre III.

Selon la référence [2], le terme  $\frac{\Delta f_0}{f}$  entraîne pour  $\rho$  une incertitude systématique ( $1 \sigma$ ) de  $1 \times 10^{-6}$ .

L'incertitude sur les valeurs tabulées de  $p_{sv}$  ne dépasse pas environ 0,15 Pa dans les conditions usuelles de température [20]. L'incertitude qui en résulte pour  $\rho$  a pour valeur environ  $0,3 \times 10^{-6}$ , dans les conditions habituelles de pression et d'humidité relative ; on peut donc la négliger.

5.2. Mesure de la température du point de rosée  $t_r$

L'expression de  $x_v$  rappelée en I (2°) permet d'écrire

$$\frac{dx_v}{x_v} = \frac{df}{f} + \frac{dp_{sv}}{p_{sv}} - \frac{dp}{p}$$

Le troisième terme sera repris au chapitre III.

Les expressions données ci-dessus en 5.1 pour  $\frac{df}{f}$  et  $\frac{dp_{sv}}{p_{sv}}$  restent formellement valables, mais on doit remplacer  $dt$  par  $dt_r$  et elles doivent être calculées en  $p$  et  $t_r$ . Comme ci-dessus, seul le premier terme de chacune de ces expressions doit être pris en compte ici (les 3 autres seront repris au chapitre III).

Leur évaluation, si elle est fondée sur les mêmes bases que ci-dessus, conduit évidemment aux mêmes résultats.

6. Récapitulation

Dans le tableau qui suit, nous rassemblons les valeurs trouvées aux paragraphes précédents.

Paragraphe	Paramètre	Incertitudes relatives			
		formule 15		formule 16	
		Systématiques	Aléatoires	Systématiques	Aléatoires
1	$R$	31 x 10 <sup>-6</sup>	...	31 x 10 <sup>-6</sup>	...
2.1	$M_i$	3	...	3	...
2.2	$x(\text{Ar})$	23	...	23	...
	$x(\text{O}_2)$	8	23 x 10 <sup>-6</sup>	} 10	23 x 10 <sup>-6</sup>
	$x(\text{CO}_2)$	17	12		
3	$M_v$	...	...	...	...
4	$Z$	17	...	17	...
5	$f$	1	...	1	...
	$p_{sv}$	...	...	...	...
Sommes quadratiques		46 x 10 <sup>-6</sup>	26 x 10 <sup>-6</sup>	43 x 10 <sup>-6</sup>	23 x 10 <sup>-6</sup>
		<u>53 x 10<sup>-6</sup></u>		<u>49 x 10<sup>-6</sup></u>	

La dernière ligne indique l'incertitude relative de la formule définitive (15) et celle de la variante (formule (16)) obtenues par addition quadratique des composantes systématique et aléatoire.



### III.- INCERTITUDE DUE AUX PARAMETRES MESURÉS

L'incertitude sur  $\rho$  due aux incertitudes sur les paramètres mesurés s'exprime en fonction de  $\Delta p$ ,  $\Delta T$ ,  $\Delta h$  (ou  $\Delta t_r$ ) et éventuellement  $\Delta x(\text{CO}_2)$ . Nous allons évaluer les coefficients de ces diverses incertitudes pour des conditions voisines de  $p = 101325 \text{ Pa}$ ,  $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $h = 0,5$  (soit  $x_v = 0,012$  et  $t_r = 9,3 \text{ }^\circ\text{C}$ ). Les dérivées partielles qui figurent dans ces coefficients seront évaluées numériquement à l'aide des tables données dans le Document du Groupe de travail.

#### 1. Pression $p$

En dérivant l'expression de  $\rho$  par rapport au paramètre  $p$  qui y figure explicitement et en reprenant les termes en  $dp$  trouvés en II.4 et en II.5.1 ou II.5.2 on obtient

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}(p) = \frac{\Delta p}{p} \left[ 1 - \frac{p}{Z} \cdot \frac{\partial Z_0}{\partial p} + \left( 1 - \frac{M_v}{M_a} \right) \cdot \left( 1 - \frac{p}{f} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial p} \right) x_v \right].$$

Le deuxième terme est de l'ordre de  $10^5 \text{ Pa} \times 36 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$   
 $= 36 \times 10^{-5}$  ;

le troisième terme est de l'ordre de  $0,378 \times (1 - 30 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$   
 $\times 10^5 \text{ Pa}) \times 0,012 = 0,0045$ .

Ces deux termes sont négligeables devant l'unité de sorte que

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}(p) \approx \underline{1,0 \times 10^{-5} \text{ Pa}^{-1} \cdot \Delta p} \text{ (soit } 100 \times 10^{-6} \text{ pour } \Delta p = 100 \text{ Pa)}.$$

#### 2. Température $t$ (ou $T$ )

En dérivant l'expression de  $\rho$  par rapport au paramètre  $T$  qui y figure explicitement et en reprenant les termes en  $dT$  trouvés en II.4 et II.5.1 on obtient, pour le cas où on mesure directement l'humidité relative  $h$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}(T) = - \frac{\Delta T}{T} \left[ 1 + \frac{T}{Z} \cdot \frac{\partial Z_0}{\partial T} + \left( 1 - \frac{M_v}{M_a} \right) \cdot \left( \frac{T}{f} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial T} + \frac{T}{p_{sv}} \cdot \frac{\partial p_{sv,0}}{\partial T} \right) x_v \right].$$

Le deuxième terme est de l'ordre de  $293 \text{ K} \times 7 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$   
 $= 2 \times 10^{-3}$  ;

Le troisième terme est voisin de  $0,378 \times (293 \text{ K} \times 2 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$   
 $+ \frac{293 \text{ K}}{2340 \text{ Pa}} \times 145 \text{ Pa} \cdot \text{K}^{-1}) \times 0,012 = 3 \times 10^{-5} + 0,08$ .

La première partie de ce troisième terme est négligeable mais non la seconde. Finalement

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}(T) \approx - \frac{1,08}{293 \text{ K}} \cdot \Delta T = \underline{- 3,7 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1} \cdot \Delta T} \text{ (soit } - 37 \times 10^{-6} \text{ pour } \Delta T = 0,01 \text{ K)}.$$

Si, au lieu de mesurer l'humidité relative, on mesure la température du point de rosée  $t_r$ , le troisième terme de l'expression ci-dessus ne figure pas, car les expressions non réécrites au point II.5.2 sont bien les mêmes qu'en II.5.1 mais  $dt$  y est remplacé par  $dt_r$ . On a dans ce cas

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} (T) \approx - \frac{1}{293 \text{ K}} \cdot \Delta T = - \underline{3,4 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1} \cdot \Delta T} \text{ (soit } - 34 \times 10^{-6} \text{ pour } \Delta T = 0,01 \text{ K)}.$$

### 3. Humidité relative $h$

Ce paramètre ne figure pas explicitement dans l'expression de  $\rho$ . En reprenant les termes en  $dh$  trouvés en II.5.1 et en II.4, on obtient

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} (h) = - \left[ \left(1 - \frac{M_v}{M_a}\right) \cdot \frac{x_v}{h} + \frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial Z_0}{\partial h} \right] \cdot \Delta h.$$

Le premier terme est voisin de  $0,378 \times 0,012/0,5 = 91 \times 10^{-4}$  et le second est de l'ordre de  $7 \times 10^{-5}$ . On a donc

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} (h) \approx - \underline{9,2 \times 10^{-3} \cdot \Delta h} \text{ (soit } - 92 \times 10^{-6} \text{ pour } \Delta h = 0,01).$$

### 4. Température du point de rosée $t_r$

Ce paramètre ne figure pas explicitement dans l'expression de  $\rho$ . Nous devons reprendre les termes en  $dt_r$  correspondant au point II.5.2, c'est-à-dire les termes en  $dt$  du point II.5.1 (en y remplaçant  $dt$  par  $dt_r$ ) et les calculer en  $(p, t_r)$ . De plus, en II.4,  $dZ/Z$  a été exprimée en fonction des différentielles  $dp$ ,  $dt$  et  $dh$ . L'équation (27) du Document du Groupe de travail permet d'exprimer  $dh$  en fonction de  $dp$ ,  $dt$  et  $dt_r$ . Nous nous bornerons à  $\frac{\partial h}{\partial t_r} \cdot dt_r$ , en négligeant l'incidence sur les termes déjà calculés des nouveaux termes en  $dp$  et  $dt$  qui apparaîtraient dans un calcul complet. On obtient ainsi

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} (t_r) = - \left[ \left(1 - \frac{M_v}{M_a}\right) \cdot \left(\frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{1}{p_{sv}} \cdot \frac{\partial p_{sv,0}}{\partial t}\right) x_v + \frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial Z_0}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial t_r} \right] \cdot \Delta t_r$$

Le premier terme entre crochets a pour valeur en  $(p, t_r)$   $0,378 \times (6 \times 10^{-6} + 79/1170) \times 0,012 \text{ K}^{-1} \approx 30 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ . Pour calculer le second, on évalue numériquement la seconde dérivée partielle (la première a été évaluée ci-dessus en III.3) ; on obtient  $7 \times 10^{-5} \times 0,034 \text{ K}^{-1} \approx 2 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ . On peut négliger ce second terme et écrire

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} (t_r) \approx - \underline{3,0 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1} \cdot \Delta t_r} \text{ (soit } - 30 \times 10^{-6} \text{ pour } \Delta t_r = 0,1 \text{ K)}.$$

5.- Fraction molaire du dioxyde de carbone  $x(\text{CO}_2)$

Ce paramètre ne figure pas dans l'expression de  $\rho$  rappelée en I. Le seul terme à considérer a été trouvé en II.2.2.2. C'est

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} (x(\text{CO}_2)) = \left[ (M_{\text{CO}_2} - M_{\text{O}_2}) / M_a \right] \cdot \Delta x(\text{CO}_2).$$

La valeur du terme entre crochets est  $12/28,96 \approx 0,41$ .

On a donc

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} (x(\text{CO}_2)) \approx \underline{0,41 \cdot \Delta x(\text{CO}_2)} \quad (\text{soit } 41 \times 10^{-6} \text{ pour } \Delta x(\text{CO}_2) = 0,0001).$$

\*

Les incertitudes sur les grandeurs mesurées sont variables d'un laboratoire à l'autre.

La sommation de leurs diverses contributions, de même que la combinaison de la somme obtenue avec l'incertitude propre à la formule, n'a de sens que dans chaque cas particulier.

P. Carré

décembre 1978  
révision : mai 1979

---